

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

STORIA DELL'ABACO: UNA INTRODUZIONE

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Salvatore Coen

Presentata da:
Laura Gobbi

Sessione 3
Anno Accademico 2010-2011

“L’abaco procura un’esperienza multisensoriale; infatti l’abacista vede muoversi le palline, le sente tintinnare quando urtano una contro l’altra e le percepisce nel loro insieme. Sicuramente non esiste un altro calcolatore digitale che abbia un’attendibilità così alta in proporzione al basso costo di acquisto e di manutenzione.”

Martin Gardner

Introduzione

L'oggetto di questa tesi è di descrivere la nascita, l'evoluzione e l'utilizzo dell'abaco nella storia. Nel primo capitolo viene ipotizzata la presenza dell'abaco in Mesopotamia e vengono introdotti l'abaco egizio e greco, con un breve accenno ai sistemi posizionali in uso presso quei popoli. Nel secondo capitolo viene presentato l'abaco romano e il modo in cui era effettivamente utilizzato per compiere i calcoli di uso comune: addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni. Nel terzo capitolo vengono descritti l'abaco cinese e giapponese e quello medievale occidentale, l'uso dell'abaco nelle scuole e il suo declino nell'età contemporanea. Viene dedicato inoltre un paragrafo alla pascalina, uno strumento meccanico che rappresenta una evoluzione dell'abaco. Nell'ultimo capitolo infine vengono proposti ed esplicitati alcuni esempi di calcoli pratici con l'abaco.

Si presume che, fin da tempi molto antichi, si siano costruiti strumenti per aiutarsi nei conti, che certamente risultarono molto utili anche dopo l'avvento della scrittura e della numerazione scritta per la rapidità e la facilità dell'uso. Indubbiamente uno strumento che ebbe una grande diffusione in tutte le classi sociali fu l'abaco, una semplice tavola di metallo, marmo o legno, ricoperta di polvere o di sabbia per essere incisa con uno stilo o con le dita. Si presume che la parola *abaco* derivi dall'antica parola ebraica *abaq*, il cui significato è probabilmente 'polvere', 'ricoprire di polvere' o 'togliere la polvere' proprio per il fatto che sopra ad essa veniva sparsa della polvere. Da questo termine deriverebbero dunque le parole $\alpha\beta\alpha\xi$, *apcar* e *abacus* che sarebbero rispettivamente i nomi che l'abaco assunse presso Greci, Etruschi e

Romani. Una diversa etimologia è proposta dallo studioso Giovanni Semerano (1994,3); il termine *abacus* si riferirebbe a due radici aramaiche: *a*-legno e *beqa*-tagliare, quest'ultimo collegato con il verbo ebraico *baqa* (che significa 'spaccare'). Il significato sarebbe presumibilmente quello di 'superficie ricavata da legno intagliato'; le prime tavolette d'abaco infatti dovevano essere in legno. Sembra che il primo abaco sia stato inventato dai Babilonesi intorno al II millennio a.C., ma c'è anche chi sostiene che l'apparizione dell'abaco in Cina possa essere avvenuta precedentemente a quella in Occidente (Merzbach, Boyer (1968)). Come già detto, i primi abachi erano costituiti da tavolette sulla cui superficie veniva steso uno strato di polvere; si annotavano i risultati parziali dei calcoli e i numeri da ricordare tracciando linee con uno stilo o assegnando a sassolini (*calculi*) di forma diversa ordini di grandezza diversi. Con il passare del tempo si sviluppò una rappresentazione numerica posizionale: sulla tavoletta di supporto erano incise delle scanalature alle quali erano attribuiti i valori delle unità, delle decine, delle centinaia e così via, partendo da destra verso sinistra. Vista la natura "posizionale" dell'abaco, è probabile che la rappresentazione dei numeri secondo una notazione posizionale sia fortemente collegata ad esso. È addirittura possibile, ma non provato in nessun modo, che la notazione posizionale sia derivata direttamente dall'abaco. In seguito si apportarono delle modifiche alla struttura dell'abaco, in quanto si introdussero dei bottoncini che erano ancora fissati alla tavoletta, ma in modo da poter scorrere lungo le scanalature, così come nel moderno pallottoliere ancora in uso nella scuola primaria, nello *suan pan* cinese e nello *schoty* russo, le palline utilizzate al posto dei chiodini possono scorrere lungo delle asticelle.

Indice

Introduzione	i
1 La nascita dell'abaco	1
1.1 Premessa	1
1.2 L'abaco in Mesopotamia e in Egitto	2
1.3 L'abaco degli antichi Greci	3
1.3.1 Il Vaso di Dario	4
1.3.2 La Tavola di Salamina	5
2 Come contavano i Romani	7
2.1 L'abaco romano	7
2.2 Come contavano i Romani	8
2.2.1 Addizione	8
2.2.2 Sottrazione	8
2.2.3 Moltiplicazione	9
2.2.4 Divisione	10
3 Evoluzione e declino dell'abaco	11
3.1 L'abaco in Oriente	11
3.1.1 L'abaco cinese: lo <i>Suan pan</i>	11
3.1.2 L'abaco in Giappone: il <i>Soroban</i>	13
3.2 L'abaco nel Medio Evo e il suo declino nell'Età Moderna . . .	14
3.3 Lo <i>Schoty</i> russo e l'abaco nelle scuole	16
3.4 La Pascalina come evoluzione dell'abaco	18

4	Esempi di conteggio con l'abaco	21
4.1	Addizioni	21
4.1.1	Esempio 1	21
4.1.2	Esempio 2	22
4.2	Sottrazioni	23
4.2.1	Esempio 1	23
4.2.2	Esempio 2	23
4.3	Moltiplicazioni	24
4.3.1	Esempio 1	24
4.3.2	Esempio 2	24
4.4	Divisioni	25
4.4.1	Esempio 1	25
4.4.2	Esempio 2	25
	Bibliografia	29

Elenco delle figure

1.1	Vaso di Dario	5
1.2	Tavola di Salamina	6
2.1	Abaco Romano	8
3.1	Suan pan	13
3.2	Soroban	14
3.3	Gettoni	15
3.4	Margarita Philosophica	16
3.5	Schoty	17
3.6	Pascalina	18
4.1	Addizione 1	22
4.2	Addizione 2	22
4.3	Sottrazione 1	23
4.4	Sottrazione 2	23
4.5	Moltiplicazione 1	24
4.6	Moltiplicazione 2	25
4.7	Divisione 1	25
4.8	Divisione 2. a.	26
4.9	Divisione 2. b.	26
4.10	Divisione 2. c.	26

Capitolo 1

La nascita dell'abaco

1.1 Premessa

Fin dai tempi più antichi gli strumenti più utilizzati per effettuare conteggi erano dei piccoli sassi. Risultava molto più pratico infatti maneggiare, al posto degli oggetti che si dovevano contare, dei sassolini ed effettuare conti aritmetici tramite i raggruppamenti e gli spostamenti di questi. Non è un caso che la parola *calcolo*, che deriva dal termine latino *calculus*, significhi proprio “sassolino”. L'utilità di questo strumento veniva però a cessare nel momento in cui i numeri utilizzati diventavano grandi, poiché, per conoscere il numero esatto degli oggetti, si dovevano comunque contare tutti i sassolini. Per ovviare al problema dei grandi numeri si passò così alla costruzione di raggruppamenti: si considerava un certo numero di sassolini, ad esempio, secondo un sistema numerico decimale, una decina, e di seguito un centinaio e un migliaio, come un nuovo gruppo, in modo da poter valutare con maggior velocità le grandi quantità di oggetti. Per distinguere gli ordini di grandezza si potevano attuare particolari accorgimenti: si potevano costruire pietruzze di forme diverse, dove a dimensioni più grandi si facevano corrispondere valori sempre più alti, si potevano utilizzare appositi gettoni ai quali si attribuivano valori differenti, oppure i sassolini potevano assumere un determinato valore a seconda di dove venivano posizionati sulla tavola di

conto. Da antiche raffigurazioni è emerso che inizialmente le tavole di conto erano semplicemente dei supporti con incise delle lettere ad indicare le diverse entità di grandezza; in seguito invece potevano anche contenere delle scanalature o delle righe orizzontali associate ai diversi simboli, sotto i quali si andavano poi a raggruppare sassolini o gettoni di quel determinato valore. Si andò in questo modo perdendo il valore dei sassolini e ci si concentrò invece sul perfezionamento della struttura della tavola di conto.

1.2 L'abaco in Mesopotamia e in Egitto

L'esistenza dell'abaco in Mesopotamia non è direttamente provata: non sono pervenuti esemplari di tavole di conto probabilmente a causa della deperibilità dei materiali con cui venivano costruite. Tuttavia, sia il ritrovamento di tavole di moltiplicazione a Babilonia, sia l'impiego di una numerazione posizionale dotata di simboli per i posti vuoti (che rappresenterebbero lo zero), depongono in favore dell'esistenza e dell'uso dell'abaco, che probabilmente apparve per la prima volta nel periodo che va dal 2700 al 2300 a.C e che doveva avere la forma di una tavoletta suddivisa in scanalature delimitanti, in ordine crescente, gli ordini di grandezza in base ad un sistema numerico sessagesimale. Si pensa che i Babilonesi abbiano adottato questo sistema sia per la possibilità di esprimere numeri elevati, che per la comodità di utilizzare una base con tanti divisori, anche se la tavola di moltiplicazione si estendeva necessariamente da 1x1 a 59x59. La difficoltà nella costruzione e nell'utilizzo di un abaco grande e poco maneggevole, in associazione ai ritrovamenti di tavole di moltiplicazione dei divisori di 60, suggeriscono la possibilità dell'esistenza di una tavola di conto più contenuta nelle dimensioni, adatta all'uso di pochi sassolini per volta e che disponesse di appropriate scanalature e suddivisioni per gettoni a cui erano attribuiti valori diversi, ad esempio quelli dei divisori di 60 e dei loro multipli.

L'utilizzo dell'abaco nell'Antico Egitto invece è certo: lo storico greco Erodoto [*Storie*, II, 36], infatti, sostiene che “gli Elleni scrivono e fanno il

conto portando la mano da sinistra a destra, gli Egizi da destra a sinistra”. Non sono giunti però esemplari né descrizioni di questo abaco.

1.3 L’abaco degli antichi Greci

Nell’Antica Grecia vi furono due principali sistemi di numerazione: uno più antico, noto come *sistema attico* o *erodiano*, ed uno più recente, chiamato *sistema ionico* o *alfabetico*. Entrambi i sistemi avevano base decimale, ma mentre il sistema attico era più primitivo, basato su un semplice schema di ripetizione, il sistema ionico risultava molto più leggero e veloce, poiché associava ai numeri le lettere dell’alfabeto greco. Il sistema attico si ritrova in iscrizioni risalenti al V secolo a.C. e rimase in uso probabilmente fino al I secolo a.C. affiancato, fin dal III secolo, dal sistema ionico. La notazione alfabetica era molto efficace nel rappresentare i numeri interi, ma era inadeguata per indicare frazioni; grazie all’opera di Archimede e Diofanto però, nei secoli successivi, si ebbe una riforma del sistema numerico, che rese più pratico l’uso delle frazioni. L’utilizzo di un sistema numerico posizionale ben si sposava, presso i Greci, all’uso dell’abaco. Questo strumento si presentava come una tavoletta suddivisa in colonne, che potevano essere orizzontali o verticali, ma generalmente verticali, e che erano contrassegnate da linee o da simboli diversi in base al sistema numerico scelto. Il numero di unità di ogni colonna veniva segnalato tramite sassolini o gettoni e se il numero di pietruzze, durante un’addizione o una moltiplicazione, era tale da rientrare nella categoria di valore successiva, allora le pietruzze di taglio minore venivano tolte e il giusto numero di unità veniva messo nella colonna vicina. Analogamente, nelle sottrazioni, quando un certo numero veniva sottratto ad un altro maggiore ma non c’erano sufficienti sassolini nella particolare colonna da cui si voleva sottrarre, una pietruzza dalla colonna di valore più alto veniva ritirata e sostituita con il numero di unità minori equivalente in valore. I particolari dell’abaco greco purtroppo si possono desumere solo dai corrispondenti particolari dell’abaco romano, dal momento che gli unici abaci dell’epoca che si

sono conservati sono stati identificati come appartenenti ai Romani. Erano in uso due diversi modelli: nel primo, per indicare le unità di valore, venivano utilizzati bottoncini o chiodini che si facevano scorrere verso l'alto e il basso, ma che non potevano essere staccati poiché erano fissi; nell'altro invece i sassolini potevano essere spostati da una colonna all'altra. Ogni colonna era suddivisa in due parti, una corta in alto e una più lunga in basso. Nella parte più corta era presente solo un sassolino, che rappresentava la metà del numero di sassolini necessario ad aggiungere un'unità nella colonna successiva, mentre nella parte più lunga era contenuto un numero di sassolini pari al valore del sassolino in alto meno uno. In questo modo si utilizzava solo il numero di sassolini strettamente necessario in quanto, sommando tutti i sassolini della stessa colonna, si ottiene il valore necessario per aggiungere un sassolino nella colonna successiva meno uno.

Sono principalmente due i reperti che ci confermano la presenza dell'abaco presso gli antichi Greci: il Vaso di Dario e la Tavola di Salamina.

1.3.1 Il Vaso di Dario

Nel 1843 a Canosa venne ritrovato un vaso, databile intorno al IV secolo a.C., in cui è raffigurato Dario, il re dei Persiani, circondato dai dignitari della sua corte. Tra questi in particolare è presente un uomo che porta un sacco di monete, probabile tributo di un popolo sconfitto, al tesoriere persiano. Egli è seduto davanti ad un tavolo di calcolo sul quale può eseguire dei conti, mentre con la mano sinistra regge una tavoletta dove si presume debba trascrivere le ricevute. Sul tavolo di calcolo sono rappresentate le lettere iniziali delle parole usate per indicare 10000, 1000, 100 e 10, e quelle dei nomi della moneta, la *dracma*, e delle sue frazioni. Se ne deduce così che all'epoca venisse utilizzato un sistema decimale puro. Questo schema corrisponde a quello in vigore presso i Romani ed è molto probabile che, nel particolare del Vaso di Dario, sia rappresentato proprio un abaco.

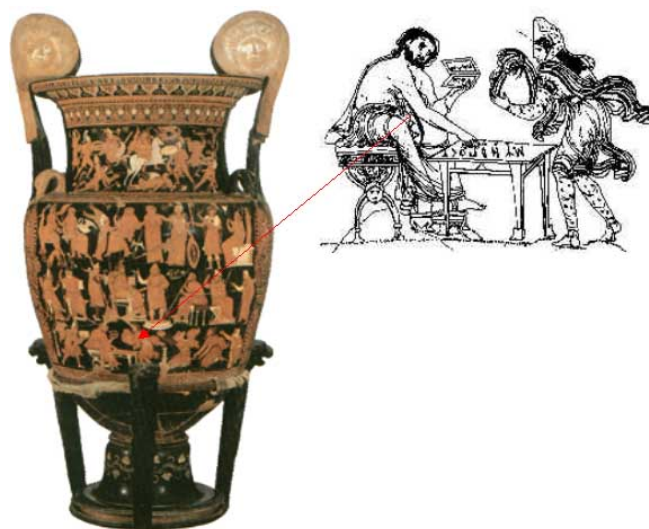


Figura 1.1: Vaso di Dario. Museo Archeologico di Napoli.

Immagine da: <http://www.canosaweb.it>

1.3.2 La Tavola di Salamina

La Tavola di Salamina, risalente al 300 a.C. circa, venne trovata nell'anno 1846 nell'isola che le ha dato il nome. Attualmente si trova al Museo Epigrafico di Atene, divisa in due parti asimmetriche. Le dimensioni (1.5 metri di altezza per 0.75 di larghezza, con spessore di 5 centimetri) ed il materiale della tavola (marmo) indicano che essa non era un abaco ordinario; probabilmente era un oggetto di pubblico uso, simile ad un tavolo di cambiavalute. Si è ipotizzato anche che potesse costituire un tavolo per registrare i punteggi di giochi come *tric-trac* o backgammon, ma non c'è dubbio che servisse ad effettuare dei conti. Le lettere sui tre lati indicano quantità come 6000 dracme (o 1 talento), 5000 dracme, 1000 dracme, e così via fino ad indicare le frazioni di obolo (un obolo corrisponde ad un sesto di dracma). I quattro spazi compresi tra le cinque linee più corte in alto dovevano proprio essere riservati alle frazioni di dracma, mentre quelli tra le linee più lunghe dovevano essere occupati dalle dracme o da tagli maggiori. Assumendo che la tavola sia un vero e proprio abaco, il numero delle linee più lunghe si spiega

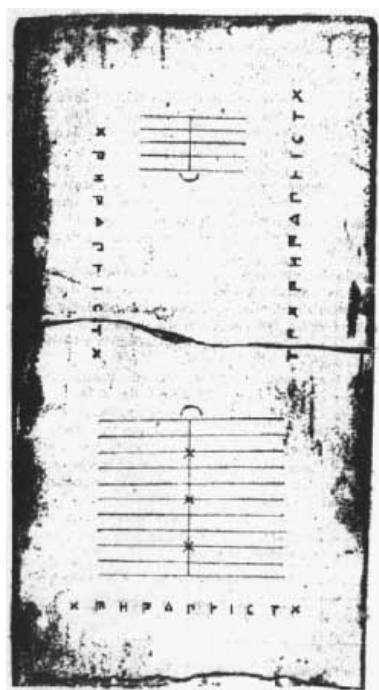


Figura 1.2: Tavola di Salamina. Museo Epigrafico di Atene.

Immagine da: <http://www.ee.ryerson.ca>

considerando che le linee dispari rappresentano le suddivisioni in colonne, mentre quelle pari, nel mezzo di ogni colonna, segnalano la posizione in cui devono essere appoggiati i sassolini. Le croci vengono interpretate come simboli per indicare la divisione tra le quattro pietruzze rappresentanti le unità e la pietruzza rappresentante il numero 5 in ogni colonna. In questo modo le croci sono necessarie solo nelle ultime tre colonne (per le centinaia, le decine e le unità), perché, dal momento che un talento valeva 6000 dracme, non c'era necessità di indicare anche una suddivisione delle migliaia.

Capitolo 2

Come contavano i Romani

2.1 L'abaco romano

Come per gli antichi Greci, anche presso i Romani erano in vigore due diversi tipi di abaco, cioè la tavola di conto, in marmo, legno o metallo, con i gettoni liberi, e un abaco più contenuto nelle dimensioni, quindi più leggero e trasportabile, che al posto dei gettoni aveva dei bottoncini simili a chiodini, chiamati *claviculi*, fissati alla tavola in modo da poter scorrere lungo delle scanalature. Analogamente all'abaco greco, le scanalature di questo abaco "tascabile" erano suddivise in due parti, quella inferiore più lunga e quella superiore più corta, in mezzo alle quali erano rappresentati i simboli numerici I, X, C, e così via, senza dimenticare i simboli per gli oboli e le frazioni di obolo, molto utili per aiutarsi nei pagamenti e per fare conti con somme di denaro. Negli esemplari ritrovati, come quello in figura 2.1, il numero di bottoncini scorrevoli era ridotto al minimo, nel senso che vi erano quattro chiodini nella parte inferiore e uno solo in quella superiore; questo serviva probabilmente per rendere ancora più semplice e leggera la versione tascabile dell'abaco. Per effettuare i calcoli si spostavano i chiodini scorrevoli verso la parte superiore della scanalatura e queste manovre di spostamento consentivano una discreta velocità nei conti e nella lettura dei numeri ottenuti.

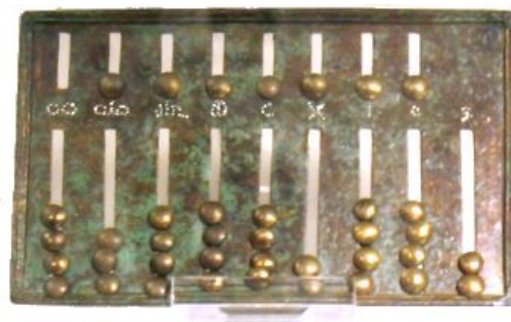


Figura 2.1: Abaco Romano. Museo Nazionale Romano di Palazzo Massimo.
Immagine da: <http://www.pte.it>

2.2 Come contavano i Romani

2.2.1 Addizione

Le operazioni più effettuate sull'abaco erano certamente le addizioni. La semplicità e la velocità con cui queste potevano essere compiute, rendevano la tavola di conto molto utile e talvolta necessaria nei conti quotidiani e negli esercizi pubblici. Nel caso dell'abaco a gettoni, si posizionavano i gettoni del primo addendo a sinistra e quelli del secondo a destra, si provvedeva a sommare i gettoni dello stesso ordine e si leggeva così il risultato finale, effettuando, se necessario, la riduzione, cioè si cercava di scrivere il numero con meno gettoni possibile. Nemmeno le addizioni di numeri con grandi cifre risultavano particolarmente difficili, in quanto, per velocizzare i calcoli, si potevano effettuare le riduzioni anche durante i passaggi delle somme parziali. Inoltre si era soliti rappresentare i singoli numeri a partire dai gettoni più alti in valore; questo garantiva infatti una più rapida lettura dei risultati.

2.2.2 Sottrazione

Analogamente alla somma, per effettuare la sottrazione si iniziava posizionando i gettoni del primo numero, in questo caso il minuendo, nel lato sinistro della tavola. Il passaggio cruciale della sottrazione era la rappre-

sentazione del secondo numero, il sottraendo, nella parte destra della tavola tramite l'utilizzo dei gettoni del minuendo. Si poteva spesso verificare che il numero di gettoni del minuendo non fosse sufficiente per rappresentare il sottraendo, quindi si doveva procedere a sostituire un gettone di valore più alto con i gettoni necessari di valore più basso. Terminato questo procedimento, si poteva leggere il risultato della sottrazione nella parte sinistra della tavola.

2.2.3 Moltiplicazione

Un'altra operazione fondamentale effettuabile tramite l'abaco era la moltiplicazione. Per effettuarla, non era sufficiente spostare i gettoni con rapidità da una parte all'altra della tavola, ma era necessario anche l'ausilio delle dita ed eventualmente del calcolo mentale. Dopo aver disposto il primo fattore, che poteva essere un numero qualsiasi, nel lato sinistro della tavola, moltiplicare per un numero ad una sola cifra non risultava molto difficile: era infatti sufficiente ripetere delle somme successive, una per ogni gettone del secondo fattore, nella parte destra della tavola, utilizzando come addendi sempre il primo fattore. terminate le somme si procedeva, se necessario, a rappresentare il risultato in forma ridotta. Nel caso in cui, invece, il secondo fattore fosse un numero maggiore di dieci, si seguiva essenzialmente lo stesso procedimento, ma risultava molto più facile commettere degli errori. Infatti, dopo aver moltiplicato il fattore a sinistra per le unità del secondo fattore, e dopo aver portato questo primo risultato in forma ridotta, si spostava di una colonna verso sinistra il numero ottenuto e si proseguiva con la moltiplicazione di questo per le decine del secondo fattore. Analogamente, nel caso in cui il secondo fattore fosse dell'ordine delle centinaia o delle migliaia, si facevano slittare i risultati parziali di due o tre colonne e si proseguiva con la moltiplicazione. Infine si leggeva il risultato nel lato destro della tavola. Come è facilmente intuibile, questa serie di passaggi poteva richiedere anche diverso tempo, ed è proprio per questo motivo che molto spesso ci si aiutava nei prodotti parziali con il calcolo mentale, in modo da avere rapidità ed efficienza.

2.2.4 Divisione

L'ultima delle operazioni base, la divisione, è anche la più difficile da effettuare con l'utilizzo dell'abaco. Lo schema da seguire, analogamente a quello della moltiplicazione, è quello di effettuare delle sottrazioni successive, nel senso che, dopo aver disposto sul lato sinistro i gettoni necessari per raffigurare il dividendo, si andavano a disporre nella parte destra un numero di gettoni pari a quante volte il divisore era contenuto nel dividendo. Ovviamente con l'aumentare dell'ordine di grandezza dei numeri considerati, questi passaggi risultavano sempre più difficili ed effettuare i conti a mente, per ottenere più velocemente i risultati, era necessario.

Capitolo 3

Evoluzione e declino dell'abaco

3.1 L'abaco in Oriente

3.1.1 L'abaco cinese: lo *Suan pan*

È provato che in Cina, fin dal II secolo a.C. e per molti secoli a venire, si utilizzava un metodo per indicare i numeri che risultava molto utile quando si trattava di eseguire dei calcoli aritmetici. Infatti venivano utilizzati i *numeri a bastoncini*, derivanti da una trasposizione grafica delle asticelle che precedentemente venivano utilizzate per effettuare conti, analogamente a quanto avveniva in Mesopotamia e in Occidente con i *calculi*. Questi bastoncini di bambù, di avorio o di legno, venivano maneggiati su una tavola, sempre in analogia con quanto avveniva nei paesi più a occidente, che venne arricchita, con il passare del tempo, con suddivisioni in righe e colonne, in modo da rendere più veloci i calcoli. Il vantaggio dell'uso dei bastoncini e, in seguito, della scrittura dei numeri a bastoncini, consisteva nella facilità e nella rapidità con cui si potevano leggere i numeri. In maniera molto semplice, infatti, i numeri da uno a cinque erano rappresentati allineando rispettivamente da una a cinque linee, verticali oppure orizzontali. Dal numero sei in poi si utilizzava un bastoncino orizzontale sotto al quale se ne aggiungevano di verticali, fino a rappresentare il numero nove. Arrivati alla decina si ricominciava ad

utilizzare singoli bastoncini disposti in verticale. L'uso dei bastoncini era così funzionale che non si vede necessità di usare strumenti come l'abaco o le tavole di conto, infatti l'introduzione di questi non avvenne così presto come si può pensare. La prima chiara descrizione dell'abaco in Cina, noto come *suan pan* (letteralmente 'vassoio per calcolare') si ebbe nel *Classico di Lu Ban*, un testo di falegnameria del XV secolo, in cui però non è specificata la quantità di posizioni decimali che potevano essere utilizzate. Molto probabilmente questo strumento era già in uso almeno da mille anni. E' anzi possibile, ma non confermato da alcuna fonte, che la diffusione e l'uso delle tavole di conto in Cina fossero addirittura precedenti a quello europeo. Lo *suan pan* cinese, al posto delle scanalature, aveva delle asticelle di bambù divise in due parti da un'unica barretta in legno. Nelle asticelle erano inserite, in modo da poter scorrere, delle palline: cinque nella parte in basso (sono quelle che valgono 1), e due in alto, che valgono 5. I numeri venivano così registrati tramite lo scorrimento delle palline verso la sbarretta separatrice. Un abaco che ha sette palline in ogni asticella, come lo *suan pan*, viene chiamato *abaco 2:5*; il vantaggio di questo tipo di abaco è quello di poter contare sia in base 10 che secondo un sistema di numerazione esadecimale. Esiste tuttavia anche una variante a questo tipo di *suan pan*: infatti l'esemplare più antico di abaco cinese, ritrovato in una tomba degli ultimi anni del XVI secolo, è costituito da asticelle con 1+5 palline, e si tratta di un tipo di abaco descritto in *Metodi di calcolo per le perle in un piatto*, libro di Xi Xinlu del 1573.

Rispetto al sistema dei bastoncini, certamente l'abaco era più pratico da utilizzare, ma aveva il difetto strutturale di rendere difficili e lunghe la rappresentazione e la lettura di un numero che avesse molte posizioni decimali, e ciò era dovuto alla mancanza di spazio. Questi problemi emergevano quando si dovevano compiere operazioni aritmetiche che richiedevano di rappresentare contemporaneamente due numeri e i risultati parziali delle varie operazioni. Il celebre matematico Zhu Zaiyu affermava, per esempio, che: "per l'estrazione di radice serve un abaco con 81 posizioni decimali e 567 palline, oppure occorre utilizzare contemporaneamente quattro o cinque abachi normali" ([3]).

La dimensione di un abaco normale era comunque sufficiente per eseguire conti con numeri che non avessero troppe cifre decimali: i calcoli si effettuavano cifra per cifra e, per usufruire in maniera razionale di tutto lo spazio disponibile, si andavano a utilizzare le posizioni dell'abaco non più utilizzabili con quelle dei risultati parziali.



Figura 3.1: Suan pan. Immagine da: <http://areeweb.polito.it>

3.1.2 L'abaco in Giappone: il *Soroban*

Il termine giapponese per indicare l'abaco, *soroban*, è probabilmente una trasposizione dal cinese *suan pan*. Anche se la diffusione a livello popolare del *soroban* avvenne all'incirca nel XVII secolo, esso era indubbiamente già noto ai mercanti giapponesi come strumento di calcolo almeno duecento anni prima. La sua struttura è molto simile a quella dell'abaco cinese, ma verso la fine del XIX secolo venne introdotta una variante semplificata, nella quale le palline in ogni asticella erano cinque: quattro nella parte bassa e una in quella alta. Questo modello di abaco, adatto principalmente per un sistema decimale, è chiamato *abaco 1:4*.

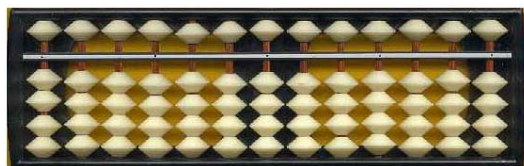


Figura 3.2: Soroban. Immagine da: <http://areeweb.polito.it>

3.2 L'abaco nel Medio Evo e il suo declino nell'Età Moderna

Un nuovo apporto alle tavole di conto si ebbe in Europa da quando, verso la fine del X secolo, l'arcivescovo Gerberto di Aurillac (950-1003), eletto papa della Chiesa Cattolica nel 999 con il nome di Silvestro II, aveva condotto un viaggio in Spagna, a Cordoba, sotto le spoglie di un pellegrino musulmano. Qui studiò e fece propria l'aritmetica araba, fondata già all'epoca sul sistema posizionale decimale dovuto agli Indiani. Egli così sviluppò una nuova tavola di conto in cui si utilizzavano gettoni marcati con le cifre indiane, ma decise di non esportare anche la notazione posizionale. Il vantaggio di questa modifica era nell'utilizzo di meno gettoni, in quanto si utilizzava un solo gettone per colonna con sopra impresso il valore corrispondente. Inoltre era possibile eseguire dei calcoli complessi perché si potevano utilizzare più numeri contemporaneamente, grazie anche allo spazio lasciato libero dall'assenza dei numerosi gettoni. Questo nuovo abaco però non ebbe una diffusione ad ampio raggio in quanto le abilità di calcolo necessarie per utilizzarlo erano maggiori rispetto all'abaco precedente e rispetto alla carta su cui si potevano effettuare calcoli analoghi, era molto più pesante e difficilmente trasportabile.

Dopo la traduzione in latino dei trattati di algebra e aritmetica del persiano Al-Khwarizmi e dopo la pubblicazione nel 1202 del *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, vennero introdotte in Occidente le nove cifre indiane e il simbolo 0 (chiamato *zephirum* in latino). L'adozione del nuovo sistema di numerazione posizionale fu però molto lenta e per questo motivo



Figura 3.3: Gettoni di Norimberga del secolo XI.

Immagine da: <http://grammidistoria.wordpress.com>

convissero, per diversi secoli, l'utilizzo dell'abaco con la numerazione romana e la nuova aritmetica con le cifre indiane. La disputa tra *abacisti* (coloro che continuavano ad utilizzare l'abaco) e *algoristi* (che invece sostenevano i vantaggi nell'utilizzare il nuovo sistema di numerazione) è ben rappresentata in un'illustrazione del libro di Gregor Reisch *Margarita Philosophica* del 1504 (figura 3.4). Sulla destra è rappresentata una tavola di conto europea con i numeri 1241 e 82. Si presume che l'abacista sia Pitagora. A sinistra invece vi è Boezio, il rappresentante della “nuova aritmetica”, che effettua calcoli con una penna. Sullo sfondo, Aritmetica sembra favorire il nuovo metodo, come si capisce anche dall'espressione spaventata di Pitagora.

Il nuovo sistema di numerazione posizionale in base dieci, gradualmente, rese obsoleta l'adozione dell'abaco come strumento di conto: il suo utilizzo era giustificato infatti semplicemente dalle difficoltà nell'effettuare conti con il sistema di numerazione precedentemente in uso. Il nuovo sistema di numerazione posizionale invece permetteva di utilizzare meno simboli e con una resa migliore, poiché i conti scritti risultavano estremamente più semplici e veloci. Per questi motivi, a partire dal XVI secolo, l'uso dell'abaco divenne in Europa sempre più raro, fino a scomparire definitivamente.



Figura 3.4: Margarita Philosophica. Immagine da: <http://it.wikipedia.org>

3.3 Lo *Schoty* russo e l'abaco nelle scuole

In Russia l'abaco, detto *schoty*, ha la stessa struttura, a bastoncini e palline, del cinese suan pan e del giapponese soroban, con la differenza che su ogni asticella, invece di cinque o sette palline, ce ne sono dieci e non c'è alcuna suddivisione. Ad ogni asticella viene attribuito un ordine di grandezza secondo un sistema di numerazione decimale. Per rappresentare un numero, analogamente agli abachi di epoca precedente, si spostano le palline verso la parte superiore dell'asticella. Una particolarità dell'abaco russo è che, per facilitare la lettura dei numeri, alcune palline, la quinta e la sesta in ogni asticella, vengono colorate diversamente dalle altre. Vista la semplicità nella costruzione e nell'utilizzo dello *schoty*, questo strumento ebbe una diffusione veramente ampia a tutti i livelli. È risaputo infatti che nei mercati e nelle attività commerciali, fino agli anni Settanta del Novecento, l'abaco era uno

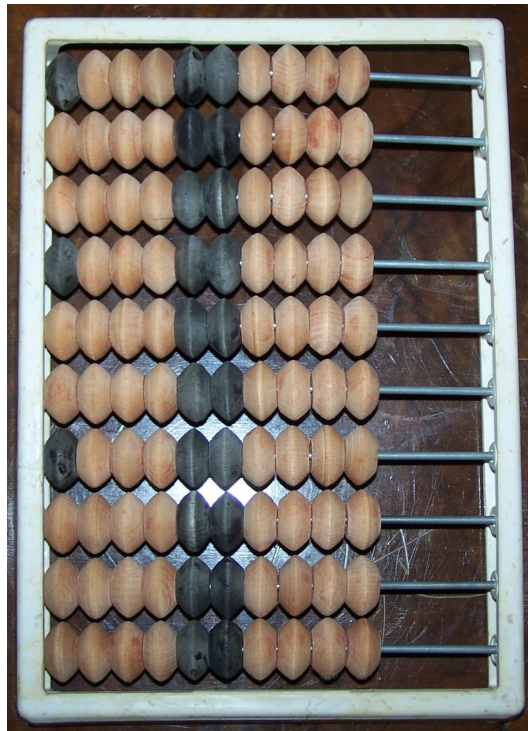


Figura 3.5: Schoty. Immagine da: <http://areeweb.polito.it>

strumento indispensabile. La popolarità dell'abaco russo subì una battuta d'arresto quando, negli anni Settanta, iniziò la produzione di massa del calcolatore elettronico tascabile. Al giorno d'oggi è stato completamente sostituito dalle calcolatrici tascabili.

L'abaco russo fu introdotto in Francia, e successivamente nei paesi dell'Europa Occidentale, dopo il 1812, quando il matematico francese Jean-Victor Poncelet, che combatteva nell'esercito di Napoleone, fu fatto prigioniero di guerra in Russia. Grazie a Poncelet, in Francia esso venne usato principalmente non per effettuare conti, ma come aiuto alla didattica.



Figura 3.6: Pascalina. Conservatoire National des Artes et M tieres. Parigi.
Immagine da: <http://it.wikipedia.org>

3.4 La Pascalina come evoluzione dell'abaco

L'abaco non pu  essere considerato un calcolatore meccanico, infatti esso nasce per annotare i risultati, parziali o finali, delle operazioni che si vogliono effettuare. A partire dal XVII secolo vennero costruite invece delle macchine addizionatrici, che si possono definire propriamente "calcolatori meccanici", in quanto esse erano in grado, tramite ingranaggi meccanici, di compiere calcoli semplici come addizioni e sottrazioni. Nel 1642 Blaise Pascal costru  una delle prime macchine addizionatrici, divenuta nota con il nome di *Pascalina*. Con questa macchina calcolatrice si potevano eseguire somme e sottrazioni e, nell'addizione, si aveva il vantaggio rispetto all'abaco di ottenere il riporto automatico. Grazie a questo passaggio una delle maggiori difficolt  nell'esecuzione dei calcoli mentali era stata annullata. L'invenzione di Pascal era basata sulla sostituzione delle palline infilate nell'asticella con una ruota dentata, che riportava sulla sua circonferenza dieci incisioni equidistanti numerate da 0 a 9. Ogni ruota era costituita di tre quadranti, uno per le unit , uno per le decine e uno per le centinaia. La differenza tra abaco e calcolatore meccanico era che nel primo, per passare durante le somme da 9 a 0, in una colonna occorre trascinare le palline verso il basso e poi aggiungere un'unit  nella colonna immediatamente a sinistra. In un calcolatore dotato di ruote invece basta far compiere ad essa un giro: nel momento in cui questa passa

per la posizione 0, un accoppiamento meccanico è tale da far effettuare un giro alla ruota a sinistra, realizzando così il rapporto di un'unità. Questa macchina non venne brevettata subito a causa della complessità della sua costruzione, ma il suo progetto venne perfezionato negli anni successivi e presentato poi, con una lettera del 1645, al Re di Francia Luigi XIV, che ne riconobbe i diritti e il brevetto. Pascal fu attento anche ai dettagli tecnici della costruzione, poichè per far conoscere più diffusamente la sua macchina calcolatrice, cercò di renderla economica e accessibile ai più. Alcune pascaline costruite personalmente da Pascal sono conservate al Conservatoire National des Artes et Métiers di Parigi. In realtà, senza che Pascal ne fosse a conoscenza, circa un ventennio prima della sua invenzione, in Germania lo scienziato Wilhelm Schickard aveva progettato una macchina addizionatrice analoga e forse superiore in certi aspetti. Tramite alcune lettere di Schickard a Keplero, sono giunti fino ad oggi i particolari del progetto, ma non sono pervenuti esemplari di tale macchina perché l'unica che era stata costruita andò distrutta in un incendio. Nel 1673 invece il matematico e filosofo Leibniz costruì la prima macchina in grado di effettuare, oltre a addizioni e sottrazioni, anche moltiplicazioni e divisioni, tramite un meccanismo che permetteva la memorizzazione dei numeri. Nella categoria delle macchine addizionatrici inoltre può essere incluso il moderno registratore di cassa, un macchinario inizialmente meccanico, oggi elettronico, che fu inventato verso la fine del XIX secolo e che venne e viene tuttora utilizzato nei magazzini e negli esercizi commerciali per memorizzare le transazioni e rilasciare eventualmente ricevuta.

Capitolo 4

Esempi di conteggio con l'abaco

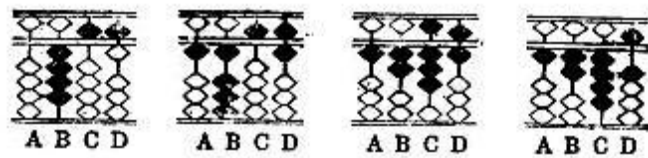
Si possono effettuare con l'abaco numerose operazioni, come le quattro operazioni aritmetiche (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione), l'elevamento a potenza e l'estrazione di radici quadrate e cubiche. Di tutte queste, l'addizione e la sottrazione costituiscono i processi base, in quanto tutte le altre operazioni si possono pensare come iterazioni di somme e sottrazioni successive. È importante sottolineare che quando si effettuano operazioni come la somma o la moltiplicazione di numeri a più cifre, solitamente il primo numero viene trascritto nella parte destra dell'abaco e il secondo nella parte a sinistra, utilizzando eventualmente le posizioni centrali per somme o sottrazioni intermedie. Di seguito verranno riportati esempi, tratti da Kojima (1994,16-43), delle operazioni per cui l'abaco era utilizzato più di frequente: addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni.

4.1 Addizioni

4.1.1 Esempio 1

In questo esempio si vuole eseguire la somma $456 + 789 = 1245$

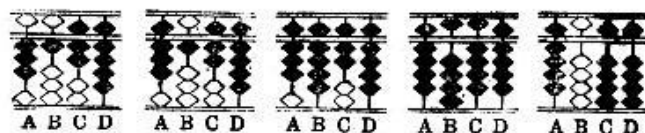
Come prima cosa si trascrive il numero 456 sulle colonne BCD. Successivamente si somma il 7 di 789 al 4 nella colonna B. Questa somma dà il risultato 1156 sulle colonne ABCD. Si aggiunge 8 del rimanente 89 al 5 della

Figura 4.1: $456 + 789 = 1245$

colonna B e si ottiene 1236 sulle colonne ABCD. Infine si aggiunge 9 al 6 della colonna D. La soluzione è 1245.

4.1.2 Esempio 2

Si effettua ora l'addizione $3179 + 5876 = 9055$

Figura 4.2: $3179 + 5876 = 9055$

Si comincia col disporre il numero 3179 sulle colonne ABCD. Aggiungendo il 5 di 5876 al 3 della colonna A si ottiene 8179 sulle colonne ABCD. Si prosegue sommando 8 del rimanente 876 all'1 della colonna B e si ha come risultato 8979 sulle colonne ABCD. Si somma ancora il 7 del restante 76 al 7 della colonna C, ottenendo 9049, e infine si aggiunge l'ultimo 6 al 9 della colonna D. Questa somma dà 55 sulle colonne CD e si può leggere il risultato finale 9055.

4.2 Sottrazioni

4.2.1 Esempio 1

Si vuole effettuare la sottrazione $623 - 375 = 248$

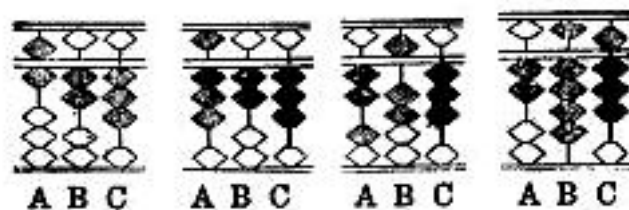


Figura 4.3: $623 - 375 = 248$

Si dispone inizialmente il numero 623 sulle colonne ABC. Si sottrae il 3 di 375 dalla cifra 6 della colonna A e si ottiene 323 sulle colonne ABC. Si prosegue sottraendo 7 del restante 75 dal 2 della colonna B, prendendo 1 dal 3 della colonna A; questo dà come risultato 253 sulle colonne ABC. Come ultima cosa si sottrae il rimanente 5 dal 3 della colonna C, prendendo 1 dal 5 della colonna B. Il risultato finale è 248.

4.2.2 Esempio 2

La prossima sottrazione è $6342 - 2547 = 3795$

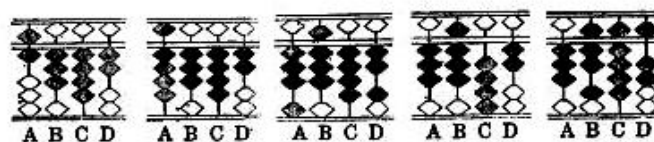


Figura 4.4: $6342 - 2547 = 3795$

Dopo aver disposto 6342 sulle colonne ABCD, si sottrae il 2 di 2547 dal 6 della colonna A. Quello che si ottiene è 4 sulla colonna A e 4342 su

ABCD. Togliendo il 5 del rimanente 547 dal 3 della colonna B, prendendo a prestito 1 dal 4 della colonna A, rimane 3842 sulle colonne ABCD. Si prosegue sottraendo il 4 del restante 47 dalla colonna C e si ha 3802. Infine si sottrae 7 dal 2 della colonna D prendendo 1 da 8 della colonna B e ciò che si legge è il risultato 3795.

4.3 Moltiplicazioni

4.3.1 Esempio 1

Un primo semplice esempio è quello di moltiplicare $24 \times 7 = 168$



Figura 4.5: $24 \times 7 = 168$

Si inizia disponendo 24 sulle asticelle DE e 7 sulla A, lasciando libere le due posizioni nel mezzo. Moltiplicando il 4 di 24 con 7 si ottiene 28, che si riporta nelle colonne FG, e si azzerava la colonna E che prima conteneva 4. Moltiplicando il restante 2 di 24 per 7, si ha 14, che si trascrive sulle colonne EF, aggiungendo questo prodotto al 28 delle colonne FG e azzerando la colonna E. Questa operazione dà come risultato 168 sulle colonne EFG.

4.3.2 Esempio 2

Un secondo esempio è quello del prodotto $8 \times 17 = 136$

Si rappresenta 8 sul bastoncino E e 17 sui bastoncini AB. Si moltiplica 8 per 1 di 17 e si trascrive il risultato, 8, sulla colonna G. Si prosegue moltiplicando 8 per il 7 di 17, si riproduce il prodotto 56 sulle colonne GH e si azzerava la colonna E. Dal momento che nella colonna G era già presente 8, si

Figura 4.6: $8 \times 17 = 136$

somma questo con il 5 di 56 e si ottiene un totale di 136, che è il risultato della moltiplicazione di partenza.

4.4 Divisioni

4.4.1 Esempio 1

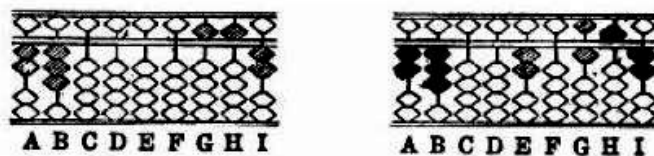
Come primo esempio di divisione si effettua $8 / 2 = 4$. Si noti che è necessario aiutarsi con il calcolo mentale.

Figura 4.7: $8 / 2 = 4$

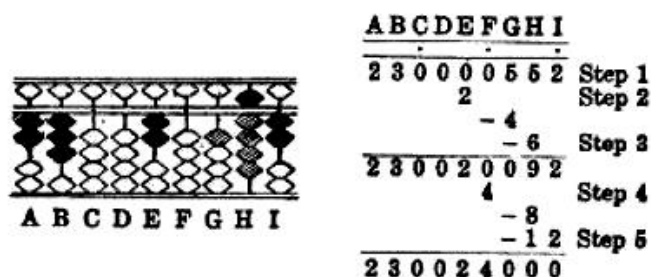
Si inizia disponendo il numero 8 sul bastoncino F e il divisore 2 sul bastoncino A, lasciando liberi i quattro bastoncini tra A e F. Si calcola mentalmente il risultato della divisione $8 / 2 = 4$, si dispone il numero 4 nella colonna D e si rimuove il numero 8 dalla colonna F. Così nella colonna D appare il risultato della divisione.

4.4.2 Esempio 2

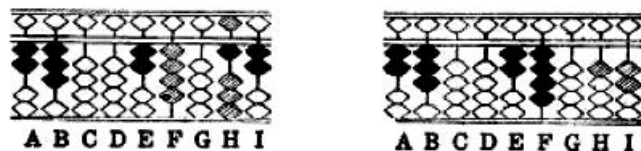
L'ultimo esempio è quello della divisione $552 / 23 = 24$

Figura 4.8: $552 \times 23 = 24$

Si inizia disponendo il numero 552 sulle colonne GHI, utilizzando I come colonna delle unità e disponendo 23 sulle colonne AB. Si divide il 5 delle centinaia di 552 per il 2 di 23. Si scrive il quoziente (2) sul bastoncino E. Si moltiplica quindi il 2 di 23 per il risultato (2) della divisione. Si sottrae quindi il risultato (4) al 5 di 552 nella colonna G.

Figura 4.9: $552 \times 23 = 24$

Ora si moltiplica il 3 di 23 per lo stesso quoziente (2), e si sottrae il risultato (6) da 15 nelle colonne GH. Rimane quindi 9 nella colonna H.

Figura 4.10: $552 \times 23 = 24$

Si conta quante volte il 2 di 23 sta nel 9 della colonna H e il risultato (4) si trascrive nella colonna F. Si moltiplica il 2 di 23 per questo quoziente e si sottrae il prodotto (8) dal 9 della colonna H. Così sulla colonna H rimane il resto 1. Infine si moltiplica il 3 di 23 per lo stesso 4 e si sottrae il prodotto (12) dal 12 delle colonne HI. Si legge così il risultato 24 nelle colonne EF.

Bibliografia

- [1] L. Nicotra, *La Tavola Pitagorica: un falso storico dimenticato*, <http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-tavola-pitagorica>, 2010;
- [2] G. Semerano, *Le Origini della Cultura Europea*, Leo S. Olschki Editore, Firenze, 1994, vol.2, p.3;
- [3] Sir T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, England, 1921;
- [4] U.C. Merzbach, C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 1968;
- [5] Il Giardino di Archimede, un Museo per la Matematica, *Le Tavole di Conto*, <http://web.math.unifi.it/archimede/laboratori/appunti/tavole.pdf>, Firenze, 2010;
- [6] Il Giardino di Archimede, un Museo per la Matematica, *I Bastoncini Cinesi*, <http://web.math.unifi.it/archimede/laboratori/appunti/cinesi.pdf>, Firenze, 2010;
- [7] T. Kojima, *The Japanese Abacus*, Charles E. Tuttle Company, Tokyo, Japan, 1954;

- [8] P. Moon, *The Abacus*, Gordon and Breach, New York, N.Y., 1971;

- [9] M. Gardner, *Mathematical Circus*, The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1992.